Exercice 12 :

1. Supposons a < b et b <= c,

A forhori a<=b et comme b <= c,

Par transitivité de <=, a<= c

Mq a c par l’absurde : Supposons a = c

* D’une part,

On a alors : c = a < b

Et a forhori c <= b

* D’autre part b<=c, donc par antisymétrie de <=, c = b

CONTRADICTION c < b

Ainsi a c

Comme a <= c et a c, a < c

1. Même tonneau
2. Supposons a <= b et c <= d

Comme a <= b, par compatibilité de <= avec +, a+c <= b+c

Comme c <= d, par compatibilité de <= avec +, c+b <= d+b

Par commutativité de +, b+c <= b+d

Enfin par transitivité de <=,

Comme a+c <= b+c et b+c <= b+d,

Alors a+c <= b+d

(a + c <= b+c <= b+d)

1. Méthode 1 :

Supposons a<b et c>0

A forhori a et c 0 donc de comparaison de par rapport a x , ac bc.

Montrons par l’absurde que ac bc :

Supposons ac = bc ie :

- ac-bc = 0

- ac + (-1)bc = 0

- ac + (-b)c = 0

- (a+(-b))c = 0

- (a-b)c = 0

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme :

a, b R , (ab = 0 a = 0 ou b = 0)

Remarque AP : cela est faux en général si on n’est pas dans un corp par exemple dans le cas des matrices carrés

VOIR FEUILLE

Démonstration du Lemme :

Soit a, b R

Sens réciproque : c’est la fait que 0 est absorbant (Démonstration déja faite)

Sens direct : Supposons que ab = 0

On a deux cas :

* Si a = 0 alors a = 0 ou b = 0
* Si a 0 alors en multipliant l’égalité ab = 0 à gauche par a-1 on obtiens :

b = 1b = a-1ab = a-10 = 0

Dans les deux cas, a = 0 ou b = 0

FIN DU LEMME

On a : (a-b)c = 0,

Donc a-b = 0 ou c = 0

Donc a = b ou c = 0

Ce qui conclut a<b et c>0

Ainsi ac bc

Et comme ac bc alors :

**ac < bc**

Méthode 2 :

Comme c > 0, c 0

Donc c est inversible.

On a alors acc-1 = bcc-1 ie a = b

CONTRADICTION **a < b**

Proposition 13 :

Démonstration :

Soient a, b R

Supposons a b

En admettant -a-b,

a-a-b b-a-b

-b -a

Idem pour l’inégalité stricte

Réciproque :

On applique alors le sens direct à -b et -a et on utilise :

-(-a)=a et -(-b)=b

Proposition 14 :

Théorème : 1 > 0

Démonstration :

Par un exo précédent, on a 1<0 ou 1 = 0 ou 1 > 0

Par un des axiomes de corps 1 0

Don on a 1<0 ou 1>0

Il suffit de montrer que 1<0 est impossible

Supposons 1<0

Par la propriété précédente -1 > -0 = 0

En Modifiant l’inégalité 1<0

Par -1(>0) on obtient (-1) 1 < (-1)0 = 0

Or (-1) 1 = -1 (vu précédemment)

Donc -1<0 contredit ce qu’on a vu plus haut.

Ainsi 1 0 et il ne reste que le cas **1 > 0**

FAIRE LA DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 15 16, 17, 18, 19